OPCIÓN A

a.- i) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 2+a & 2a \\ 0 & a-1 & 3a \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$. Calcular su rango en función de **a**. **(6 puntos)**

ii) Calcular $\mathbf{A^{-1}}$ para **a = 1**. **(4 puntos)**

$i)$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 2+a & 2a \\ 0 & a-1 & 3a \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix}=a\cdot\begin{vmatrix} a & 2+a & 2 \\ 0 & a-1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a\cdot\begin{vmatrix} a-2 & 2+a & 0 \\ -3 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} a-2 & 2+a \\ -3 & a-1 \end{vmatrix}=$$

$$|A|=a\cdot\left[(a-2)\cdot(a-1)+3\cdot(2+a)\right]=a\cdot\left(a^2-3a+2+6+3a\right)=a\cdot\left(a^2+8\right)\Rightarrow$$

$$Si\ |A|=0\Rightarrow a\cdot\left(a^2+8\right)=0\Rightarrow\begin{cases} a=0 \\ a^2+8=0\Rightarrow a^2=-8\Rightarrow a=\pm\sqrt{-8}\Rightarrow No\ hay\ solución\ en\ \Re \end{cases}$$

$$\forall a\in\Re-\{0\}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rang\ (A)=3$$

$Si\ a=0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow rang\ (A)=2$$

$b)$

Una matriz tiene inversa cuando su determinante no sea nulo

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=9\neq 0\Rightarrow Existe\ A^{-1}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\left(adj\ A^t\right)\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$adj\ A^t=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 9 \\ 3 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -3 & 9 \\ 3 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

b.- i) Discuta para qué valores de a el sistema siguientes es compatible:

$$\begin{cases} (a+3)x+(2a-1)y=0 \\ (a+1)x-az=a \\ 2x+(a-2)y-az=a \end{cases}$$ **(7 puntos)**

ii) Resuélvalo en el caso (o casos) en que sea compatible indeterminado. **(3 puntos)**

$i)$

$$|A|=\begin{vmatrix} a+3 & 2a-1 & 0 \\ a+1 & 0 & -a \\ 2 & a-2 & -a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+3 & 2a-1 & 0 \\ a-1 & 2-a & 0 \\ 2 & a-2 & -a \end{vmatrix}=(-a)\cdot\begin{vmatrix} a+3 & 2a-1 \\ a-1 & 2-a \end{vmatrix}=$$

$$|A|=(-a)\cdot[(a+3)\cdot(2-a)-(a-1)\cdot(2a-1)]=(-a)\cdot\left[-a^2-a+6-\left(2a^2-3a+1\right)\right]=(-a)\cdot\left(-3a^2+2a+5\right)$$

$$Si\ |A|=0 \Rightarrow a\cdot\left(3a^2-2a-5\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ 3a^2-2a-5=0 \Rightarrow \Delta=(-2)^2-4\cdot3\cdot(-5)=4+60=64\geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$a=\frac{2\pm\sqrt{64}}{2\cdot3} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{2+8}{6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3} \\ a=\frac{2-8}{6}=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall a\in\Re-\left\{-1\,,\,0\,,\,\frac{5}{3}\right\} \Rightarrow |A|\neq0 \Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ Determinado$$

$Si\ a=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A)=rang\ (A/B)=2<Número\ incógnitas$$

$Sistema\ Compatible\ Indeterminado$

$Si\ a=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A)=rang\ (A/B)=2<Número\ incógnitas$$

$Sistema\ Compatible\ Indeterminado$

Continuación del Problema b) de la Opción A

$i)$ *Continuación*

$Si\ a = \frac{5}{3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{14}{3} & \frac{7}{3} & 0 & 0 \\ \frac{8}{3} & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ 2 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 14 & 7 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -5 & 5 \\ 6 & -1 & -5 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -5 & 5 \\ 6 & -1 & -5 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -5 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -5 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$rang\ (A) = rang\ (A/B) = 2 <$ *Número incógnitas* $\Rightarrow$ *Sistema Compatible Indeterminado*

$ii)$

$Si\ a = -1 \Rightarrow$ *Sistema Compatible Indeterminado*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow z = -1 \Rightarrow 2x - 3y = 0 \Rightarrow 2x = 3y \Rightarrow x = \frac{3}{2} y \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = \left(\frac{3}{2}\lambda\ ,\ \lambda\ ,\ -1\right)$$

$Si\ a = 0 \Rightarrow$ *Sistema Compatible Indeterminado*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow -y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = (0\ ,\ 0\ ,\ \mu)$$

$Si\ a = \frac{5}{3} \Rightarrow$ *Sistema Compatible Indeterminado*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -5 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow 2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x \Rightarrow 6x - (-2x) - 5z = 5 \Rightarrow 5z = 8x - 5 \Rightarrow z = \frac{8}{5} x - 1 \Rightarrow$$

$$Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = \left(\alpha\ ,\ -2\alpha\ ,\ \frac{8}{5}\alpha - 1\right)$$

c) Sea la función **f (x) = sen (2x) - x**. Demostrar que la función **f(x)** tiene exactamente tres ceros en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.O sea, debe probar que existen exactamente tres valores de x en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$tales que **f (x) = 0**. **(10 puntos)**

Teniendo en cuenta el Teorema de Bolzano que determina que si **f(x)** es continua en el intervalo **[a , b],** y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a) $\neq$ sign f(b)]**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\ , b)$ tal que **f(c) = 0**

La función dada **f (x) = sen (2x) - x** es continua en todo su dominio, que es la recta real, y además es derivable en todo ese dominio por lo tanto en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$y como:

$$\begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = sen\left[2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = sen\,(-\pi) + \frac{\pi}{2} = sen\,(\pi) + \frac{\pi}{2} = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} > 0 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = sen\left[2\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] - \frac{\pi}{2} = sen\,(\pi) - \frac{\pi}{2} = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} < 0 \end{cases}$$

por lo tanto **[sign f($-\frac{\pi}{2}$) $\neq$ sign f($\frac{\pi}{2}$)]**, entonces existe, al menos, un punto $c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que **f(c) = 0** que es la única solución posible.

Veamos si hay más puntos que cumplen esta condición.
Establezcamos los extremos relativos que existen en este intervalo y que nos determinaran intervalos diferentes en donde se puede cumplir la condición **f(c) = 0**

$$f'(x) = 2\cos(2x) - 1 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 2\cos(2x) - 1 = 0 \Rightarrow 2\cos(2x) = 1 \Rightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$2x = arc\cos\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 60^{o} + 360^{o}\cdot\pi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ 2x = 300^{o} + 360^{o}\cdot\pi = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases}, k \in Z \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \begin{cases} k = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ k = -1 \Rightarrow \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6} \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \\ \begin{cases} k = 0 \Rightarrow \frac{5\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ k = -1 \Rightarrow \frac{5\pi}{6} - \pi = -\frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \end{cases} \Rightarrow Estudiaremos\ los\ intervalos \begin{cases} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right) \\ \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) \\ \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

Continuación del problema c) de la opción A

$$\left\{\begin{array}{l} f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=sen\left[2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=sen\left(-\pi\right)+\frac{\pi}{2}=sen\left(\pi\right)+\frac{\pi}{2}=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}>0 \\ f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=sen\left[2\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=sen\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi-3\sqrt{3}}{6}<0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$sign\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\neq sign\ f\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow Existe\ d\in\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow f\left(d\right)=0$$

$$\left\{\begin{array}{l} f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=sen\left[2\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=sen\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi-3\sqrt{3}}{6}<0 \\ f\left(\frac{\pi}{6}\right)=sen\left[2\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]-\frac{\pi}{6}=sen\left(\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}>0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

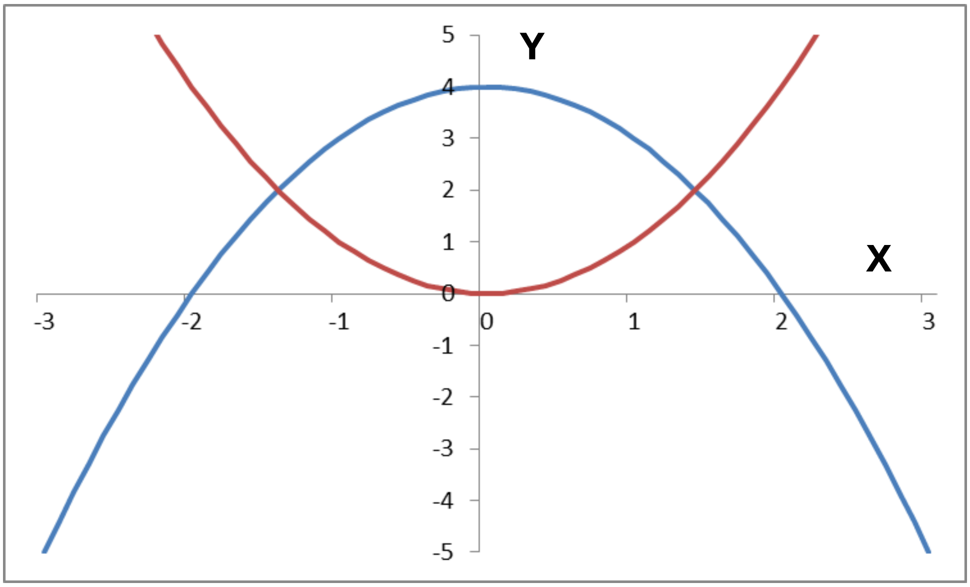
$$sign\ f\left(-\frac{\pi}{6}\right)\neq sign\ f\left(\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow Existe\ e\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow f\left(e\right)=0$$

$$\left\{\begin{array}{l} f\left(\frac{\pi}{6}\right)=sen\left[2\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]-\frac{\pi}{6}=sen\left(\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}>0 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=sen\left[2\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]-\frac{\pi}{2}=sen\left(\pi\right)-\frac{\pi}{2}=0-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}<0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$sign\ f\left(\frac{\pi}{6}\right)\neq sign\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow Existe\ h\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow f\left(h\right)=0$$

Queda demostrado que son tres, **d**, **e** y **h**, los puntos de corte de la función con el eje OX en el intervalo estudiado

d) Haga un dibujo del recinto limitado por las curvas $\mathbf{y_1(x) = 4 - x^2}$, $\mathbf{y_2(x) = x^2}$. **(4 puntos)**
Calcular el área de este recinto. **(6 puntos)**



$$Cortes\ entre\ funciones \Rightarrow 4 - x^2 = x^2 \Rightarrow 4 - 2x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_1(-x) = 4 - (-x)^2 = 4 - x^2 = y_1(x) \Rightarrow Simétrica\ respecto\ a\ OY \\ y_2(-x) = (-x)^2 = x^2 = y_2(x) \Rightarrow Simétrica\ respecto\ a\ OY \end{cases} \Rightarrow$$

$$A = 2\int_0^{\sqrt{2}} (4 - x^2)\,dx - 2\int_0^{\sqrt{2}} x^2\,dx = 2\int_0^{\sqrt{2}} (4 - 2x^2)\,dx = 2 \cdot 4 \cdot [x]_0^{\sqrt{2}} - 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^{\sqrt{2}} = 8\left(\sqrt{2} - 0\right) - \frac{4}{3}\left(\sqrt{2^3} - 0^3\right)$$

$$A = 8\sqrt{2} - \frac{4}{3} \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2} - \frac{8}{3}\sqrt{2} = \frac{24 - 8}{3}\sqrt{2} = \frac{16}{3}\sqrt{2}\ u^2$$

OPCIÓN B

a) Consideremos el punto P **(1, 2, 3)** y la recta $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$

i) Calcular la ecuación general del plano que contiene el punto **P** y la recta **r**. **(4 puntos)**
ii) Calcular el punto simétrico de **P** respecto a la recta **r**. **(6 puntos)**

i) El plano π queda determinado por el vector director de la recta **r**, por el vector **PR**, siendo **R** un punto cualquiera de la recta **r** (tomaremos el determinado en su ecuación) y por el vector **PG**, siendo **G** el punto genérico del plano. Los tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y por ello el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación pedida

$$Siendo\ R(2\,,-1\,,1)$$

$$\left\{\begin{array}{r} \overrightarrow{v_r} = (3\,,2\,,1) \\ \overrightarrow{PR} = (2\,,-1\,,1) - (1\,,2\,,3) = (1\,,-3\,,-2) \\ \overrightarrow{PG} = (x\,,y\,,z) - (1\,,2\,,3) = (x-1\,,y-2\,,z-3) \end{array}\right. \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(-4)\cdot(x-1) + (y-2) - 9\,(z-3) - 2\,(z-3) + 3\cdot(x-1) + 6\cdot(y-2) = 0 \Rightarrow$$

$$(-1)\cdot(x-1) + 7\,(y-2) - 11\,(z-3) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - 7y + 11z - 20 = 0$$

ii) Siendo **S** el punto genérico de la recta **r**, el vector **PS** es perpendicular al vector director de la recta siendo su producto escalar nulo, y con ese operación calculamos el punto **Q**, en la recta, que es el punto medio entre **P** y su simétrico **P'**

$$r: \left\{\begin{array}{l} x = 2+3\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = 1+\lambda \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} \overrightarrow{PS} = (2+3\lambda\,,-1+2\lambda\,,1+\lambda) - (1\,,2\,,3) = (1+3\lambda\,,-3+2\lambda\,,-2+\lambda) \\ \overrightarrow{v_r} = (3\,,2\,,1) \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{PS} \perp \overrightarrow{v_r} \Rightarrow \overrightarrow{PS}\cdot\overrightarrow{v_r} = 0 \Rightarrow (1+3\lambda\,,-3+2\lambda\,,-2+\lambda)\cdot(3\,,2\,,1) = 0 \Rightarrow 3+9\lambda-6+4\lambda-2+\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$-5+14\lambda = 0 \Rightarrow 14\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{14} \Rightarrow Q\left\{\begin{array}{l} x = 2+3\cdot\frac{5}{14} \\ y = -1+2\cdot\frac{5}{14} \\ z = 1+\frac{5}{14} \end{array}\right. \Rightarrow Q\left(\frac{43}{14}\,,-\frac{4}{14}\,,\frac{19}{14}\right) \Rightarrow Q\left(\frac{43}{14}\,,-\frac{2}{7}\,,\frac{19}{14}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{43}{14} = \frac{1+x_{P'}}{2} \Rightarrow 14+14x_{P'} = 86 \Rightarrow 14x_{P'} = 72 \Rightarrow x_{P'} = \frac{72}{14} = \frac{36}{7} \\ -\frac{2}{7} = \frac{1+x_{P'}}{2} \Rightarrow 7+7y_{P'} = -4 \Rightarrow 7y_{P'} = -11 \Rightarrow y_{P'} = -\frac{11}{7} \\ \frac{19}{14} = \frac{1+z_{P'}}{2} \Rightarrow 14+14z_{P'} = 38 \Rightarrow 14x_{P'} = 24 \Rightarrow x_{P'} = \frac{24}{14} = \frac{12}{7} \end{array}\right. \Rightarrow P'\left(\frac{36}{7}\,,-\frac{11}{7}\,,\frac{12}{7}\right)$$

b)

i) Discutir para qué valores de **a** y **b** el sistema siguientes es compatible:

$$\begin{cases} (a-1)x+5ay+az=a-b \\ y-2az=a+b \\ 3ay+(2-a)z=b \end{cases}$$ **(7 puntos)**

ii) Resuélvalo en el caso (o casos) en que sea compatible indeterminado. **(3 puntos)**

$$|A|=\begin{vmatrix} a-1 & 5a & a \\ 0 & 1 & -2a \\ 0 & 3a & 2-a \end{vmatrix}=(a-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2a \\ 3a & 2-a \end{vmatrix}=(a-1)\cdot\left(2-a+6a^2\right)\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow(a-1)\cdot\left(2-a+6a^2\right)=0$$

$$\begin{cases} a-1=0\Rightarrow a=1 \\ 6a^2-a+2=0\Rightarrow\Delta=(-1)^2-4\cdot6\cdot2=1-48=-47<0\Rightarrow No\ hay\ soluciones\ reales \end{cases}$$

$$\forall a\in\Re-\{1\}\Rightarrow|A|\neq0\Rightarrow rang(A)=3=Número\ de\ incognitas\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado$$

$$Si\ a=1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 1 & 1-b \\ 0 & 1 & -2 & 1+b \\ 0 & 3 & 1 & b \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 1-2b \\ 0 & 7 & 0 & 1+3b \\ 0 & 3 & 1 & b \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 1-2b \\ 0 & 14 & 0 & 2+6b \\ 0 & 3 & 1 & b \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 1-2b \\ 0 & 0 & 0 & -5+20b \\ 0 & 3 & 1 & b \end{array}\right)\Rightarrow-5+20b=0\Rightarrow$$

$$20b=5\Rightarrow b=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$$

$$Si\ a=1\ y\ b=\frac{1}{4}\Rightarrow rang(A)=rang(A/B)=2<Número\ de\ incognitas\Rightarrow Compatible\ Indeterminado$$

$$Si\ a=1\ y\ b\neq\frac{1}{4}\Rightarrow rang(A)=2\neq rang(A/B)=3\Rightarrow Sistema\ \ Incompatible$$

$$Si\ a=1\ y\ b=\frac{1}{4}\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{5}{4} \\ 0 & 3 & 1 & \frac{1}{4} \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 20 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & -8 & 5 \\ 0 & 12 & 4 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 20 & 4 & 3 \\ 0 & 44 & 0 & 11 \\ 0 & -8 & 0 & -2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 20 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 0 & -2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 20 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$4y=1\Rightarrow y=\frac{1}{4}\Rightarrow 20\cdot\frac{1}{4}+4z=3\Rightarrow 5+4z=3\Rightarrow 4z=-2\Rightarrow z=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

$$Solución\Rightarrow(x\ ,\ y\ ,\ z)=\left(\lambda\ ,\ \frac{1}{4}\ ,-\frac{1}{2}\right)$$

c) Sea la función $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x-2}$

i) Calcular los extremos de la función **f (x)**. **(7 puntos)**
ii) Estudiar cuando la función **f (x)** es cóncava o convexa. **(3 puntos)**

$i)$

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{(x-1)^2-(x-2)^2}{(x-1)^2(x-2)^2}=\frac{x^2-2x+1-\left(x^2-4x+4\right)}{(x-1)^2(x-2)^2}=\frac{x^2-2x+1-x^2+4x-4}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x-3}{(x-1)^2(x-2)^2}\Rightarrow Crecimiento\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow\frac{2x-3}{(x-1)^2(x-2)^2}>0\Rightarrow\begin{cases}2x-3>0\Rightarrow x>\dfrac{3}{2}\\(x-1)^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\\(x-2)^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\end{cases}$$

$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $\dfrac{3}{2}$ $\qquad\qquad\qquad$ ∞

$x>\dfrac{3}{2}$	**(-)**	**(+)**
(x – 1)^2 > 0	**(+)**	**(+)**
(x – 2)^2 > 0	**(+)**	**(+)**
Solución	**(-)**	**(+)**

Decreciente $\forall x\in\Re\,/\,x<\dfrac{3}{2}$ **Creciente** $\forall x\in\Re\,/\,x>\dfrac{3}{2}$

Mínimo relativo $x=\dfrac{3}{2}\Rightarrow f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{\frac{3}{2}-1}-\dfrac{1}{\frac{3}{2}-2}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{-\frac{1}{2}}=2+2=4$

$ii)$

$$f''(x)=\frac{2\,(x-1)^2(x-2)^2-\left[2\,(x-1)(x-2)^2+2\,(x-1)^2\,(x-2)\right](2x-3)}{(x-1)^4(x-2)^4}\Rightarrow$$

$$f''(x)=\frac{(x-1)(x-2)\,\{2\,(x-1)\,(x-2)-\left[2\,(x-2)+2\,(x-1)\right](2x-3)\}}{(x-1)^4(x-2)^4}$$

$$f''(x)=\frac{2\left(x^2-3x+2\right)-(2x-4+2x-2)\;(2x-3)}{(x-1)^3(x-2)^3}=\frac{2x^2-6x+4-(4x-6)\;(2x-3)}{(x-1)^3(x-2)^3}=$$

$$f''(x)=\frac{2x^2-6x+4-\left(8x^2-12x-12x+18\right)}{(x-1)^3(x-2)^3}=\frac{2x^2-6x+4-8x^2+24x-18}{(x-1)^3(x-2)^3}=\frac{-6x^2+18x-14}{(x-1)^3(x-2)^3}$$

$$-6x^2+18x-14=0\Rightarrow(-2)\cdot\left(3x^2-9x+7\right)=0\Rightarrow 3x^2-9x+7=0\Rightarrow\Delta=(-9)^2-4\cdot3\cdot7=7\geq0$$

$$x=\frac{9\pm\sqrt{7}}{2\cdot3}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{9+\sqrt{7}}{6}\\x=\dfrac{9-\sqrt{7}}{6}\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\frac{-(2)\cdot\left(x-\dfrac{9+\sqrt{7}}{6}\right)\cdot\left(x-\dfrac{9-\sqrt{7}}{6}\right)}{(x-1)^3(x-2)^3}$$

Continuación del problema c) de la Opción B

$$Concavidad \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f''(x) = \frac{(-2)\cdot\left(x-\frac{9+\sqrt{7}}{6}\right)\cdot\left(x-\frac{9-\sqrt{7}}{6}\right)}{(x-1)^3(x-2)^3} > 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2<0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ x-\frac{9+\sqrt{7}}{6} > 0 \Rightarrow x > \frac{9+\sqrt{7}}{6} = 1'94 \\ x-\frac{9-\sqrt{7}}{6} > 0 \Rightarrow x > \frac{9-\sqrt{7}}{6} = 1{,}05 \\ (x-1)^3 > 0 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow x>1 \\ (x-2)^3 > 0 \Rightarrow x-2>0 \Rightarrow x>2 \end{cases}$$

$-\infty$	**1**	$\frac{9-\sqrt{7}}{6}$	$\frac{9+\sqrt{7}}{6}$	**2**	∞
-2 < 0	**(-)**	**(-)**	**(-)**	**(-)**	**(-)**
x > 1	**(-)**	**(+)**	**(+)**	**(+)**	**(+)**
x > 2	**(-)**	**(-)**	**(-)**	**(-)**	**(+)**
$x > \frac{9-\sqrt{7}}{6}$	**(-)**	**(-)**	**(+)**	**(+)**	**(+)**
$x > \frac{9+\sqrt{7}}{6}$	**(-)**	**(-)**	**(-)**	**(+)**	**(+)**
Solución	**(-)**	**(+)**	**(-)**	**(+)**	**(-)**

Concavidad $\forall x \in \Re / \left(1 < x < \frac{9-\sqrt{7}}{6}\right) \cup \left(\frac{9+\sqrt{7}}{6} < x < 2\right)$

Convexidad $\forall x \in \Re / (x<1) \cup \left(\frac{9-\sqrt{7}}{6} < x < \frac{9+\sqrt{7}}{6}\right) \cup (x>2)$

d) Calcule la siguiente integral indefinida: $\int \frac{x-1}{x^3+x^2}\,dx$ **(10 puntos)**

$$\frac{x-1}{(x+1)\,x^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} = \frac{Ax^2 + Bx\,(x+1) + C\,(x+1)}{(x+1)\,x^2} \Rightarrow Ax^2 + Bx\,(x+1) + C\,(x+1) = x-1$$

$$\begin{cases} x=-1 \Rightarrow A\cdot(-1)^2 + B\cdot(-1)\cdot(-1+1) + C\,(-1+1) = -1-1 \Rightarrow A=-2 \\ x=0 \Rightarrow A\cdot 0^2 + B\cdot 0\cdot(0+1) + C\,(0+1) = 0-1 \Rightarrow C=-1 \end{cases}$$

$$Derivando \Rightarrow 2Ax + B(x+1) + Bx + C = 1 \Rightarrow x=0 \Rightarrow 2A\cdot 0 + B(0+1) + B\cdot 0 + C = 1 \Rightarrow B+C=1 \Rightarrow$$

$$B-1=1 \Rightarrow B=2 \Rightarrow \frac{x-1}{(x+1)\,x^2} = \frac{-2}{x+1} + \frac{2}{x} + \frac{-1}{x^2}$$

$$\int \frac{x-1}{x^3+x^2}\,dx = -2\int\frac{dx}{x+1} + 2\int\frac{dx}{x} - \int\frac{dx}{x^2} = -2\cdot\ln\,(x+1) + 2\cdot\ln\,x - \frac{1}{-1}x^{-1} = \ln\,\frac{x^2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} + K$$